

第4讲 二次函数实际问题练习

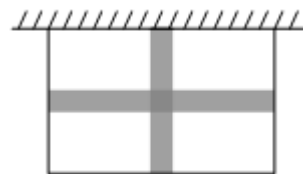
一、实际应用问题

1. 面积问题

练习1

1. 2015~2016学年9月湖北武汉江岸区武汉二中广雅中学初三上学期月考第22题10分 ★★★

广雅中学课外活动小组准备围建一个矩形花房，其中一边靠墙，另外三边由周长为 50 米的篱笆围成，已知墙长 30 米（如图所示），设这个花房垂直于墙的一边长为 x 米（花房中间修筑两条互相垂直的宽为 2m 的小路，剩余部分种植花卉）。



- (1) 若平行于墙的一边长为 y 米，直接写出 y 与 x 之间的函数关系式及自变量 x 的取值范围。
- (2) 设花房中种植花卉部分的面积为 S ，求 S 与 x 的函数关系。
- (3) 垂直于墙的一边长为多少米时，面积 S 有最大值，求这个最大值。

【答案】 (1) $y = 56 - 2x$ ， $13 \leq x < 28$ 。

(2) $S = -2x^2 + 58x - 108$ 。

(3) 当 $x = \frac{29}{2}$ 时， S 有最大值 $\frac{625}{2}$ 。

【解析】 (1) $y = 50 - 2(x - 2) + 2 = 56 - 2x$ ，

$$\because 0 < 56 - 2x \leq 30,$$

$$\therefore 13 \leq x < 28.$$

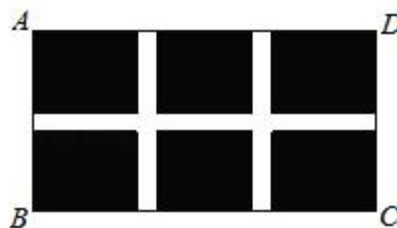
(2) $S = (x - 2)(56 - 2x - 2) = -2x^2 + 58x - 108$ 。

(3) $\because S = -2\left(x - \frac{29}{2}\right)^2 + \frac{625}{2}$ ，
 $\therefore$ 当 $x = \frac{29}{2}$ 时， S 有最大值 $\frac{625}{2}$ 。

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

2. 2016~2017学年江西上饶婺源县初一上学期期末第20题6分 ★★

如图，小区规划在一个长 80m，宽 40m 的长方形草坪上修建三条同样宽的甬道，使其中两条与 AB 平行，另一条与 BC 平行，场地的其余部分种草，甬道的宽度为 a m。



(1) 用含 a 的代数式表示草坪的总面积 S ;

(2) 如果每一块草坪的面积都相等, 且甬道的宽为 $1m$, 那么每块草坪的面积是多少平方米?

【答案】 (1) $S = 2a^2 - 160a + 3200$

(2) 每一块草坪的面积是 $507m^2$.

【解析】 (1) $S = 80 \times 40 - (80a + 2 \times 40a - 2a^2) = 2a^2 - 160a + 3200$;

(2) 当 $a = 1$ 时, $S = 2 \times 1^2 - 160 \times 1 + 3200 = 3042m^2$

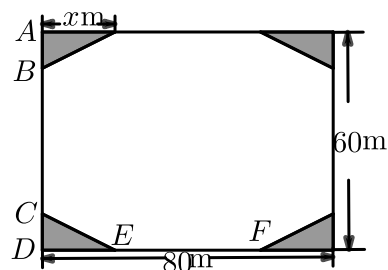
所以每一块草坪的面积为 $3042 \div 6 = 507m^2$

答: 每一块草坪的面积是 $507m^2$.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

3. 2019~2020学年12月安徽合肥包河区合肥阳光中学初三上学期月考第19题10分 ★★★★★

应我市创建文明城市要求, 某小区业主委员会决定把一块长 $80m$, 宽 $60m$ 的矩形空地建成花园小广场, 设计方案如图所示, 阴影区域为绿化区 (四块绿化区为全等的直角三角形), 空白区域为活动区, 且四周出口宽度一样, 其宽度不小于 $36m$, 不大于 $44m$, 预计活动区造价 60 元/ m^2 , 绿化区造价 50 元/ m^2 , 设绿化区较长直角边为 xm .



(1) 求工程队总造价 y (元) 与 x (m) 的函数关系式, 并求出 x 的取值范围.

(2) 如果业主委员会最多投资 28.4 万元, 能否完成全部工程? 若能, 请写出 x 为整数的所有工程方案; 若不能, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -20x^2 + 200x + 288000$,

x 的取值范围: $18 \leq x \leq 22$.

(2) 能; 所有工程方案如下:

① 较长直角边为 $20m$, 短直角边为 $10m$, 出口宽度为 $40m$;

② 较长直角边为 $21m$, 短直角边为 $11m$, 出口宽度为 $38m$;

③较长直角边为 22m，短直角边为 12m，出口宽度为 36m。

【解析】(1) 由题意得： $BC = EF = 80 - 2x$ ，

$$\therefore AB = CD = \frac{60 - (80 - 2x)}{2} = x - 10,$$

$$\therefore y = 50 \times 4 \times \frac{1}{2}x(x - 10) + 60 \left[60 \times 80 - 4 \times \frac{1}{2}x(x - 10) \right]$$

$$= -20x^2 + 200x + 288000,$$

$$\because 36 \leq 80 - 2x \leq 44,$$

$$\therefore 18 \leq x \leq 22.$$

$$(2) \therefore y = -20x^2 + 200x + 288000$$

$$= -20(x - 5)^2 + 288500$$

$$\therefore \text{当 } y = 284000 \text{ 时, 即 } -20x^2 + 200x + 288000 = 284000,$$

解得：

$$x_1 = -10 \text{ (不符合题意, 舍去)}, x_2 = 20,$$

$$\because a = -20 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x > 5$ 时, y 随 x 增大而减小,

$\therefore$ 当业主委员会最多投资 28.4 万元时, $x \geq 22$,

$$\because 18 \leq x \leq 22,$$

$$\therefore 20 \leq x \leq 22,$$

$\therefore$ 当业主委员会最多投资 28.4 万元, 能完成全部工程,

所有工程方案如下：

①较长直角边为 20m，短直角边为 10m，出口宽度为 40m；

②较长直角边为 21m，短直角边为 11m，出口宽度为 38m；

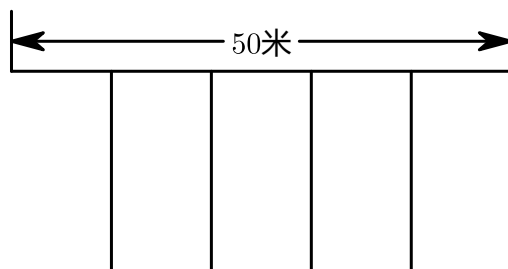
③较长直角边为 22m，短直角边为 12m，出口宽度为 36m。

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

练习2

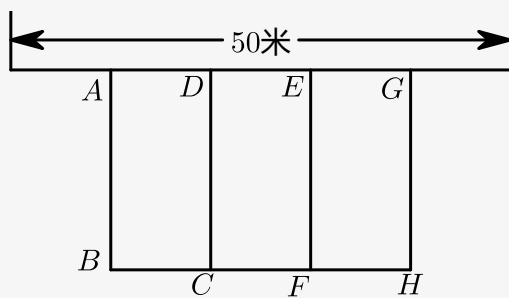
4. 2017~2018学年10月安徽合肥蜀山区合肥金湖学校初三上学期月考第13题5分 ★★★

某农场拟建三间长方形种牛饲养室，饲养室的一面靠墙（墙长 50m），中间用两道墙隔开（如图）。已知计划中的建筑材料可建墙的总长度为 48m，则这三间长方形种牛饲养室的总占地面积的最大值为 _____ m^2 。



【答案】 144

【解析】 如图，设总占地面积为 S (m^2)， CD 的长度为 x (m)，



由题意知： $AB = CD = EF = GH = x$ ，

$\therefore BH = 48 - 4x$ ，

$\because 0 < BH \leq 50$ ， $CD > 0$ ，

$\therefore 0 < x < 12$ ，

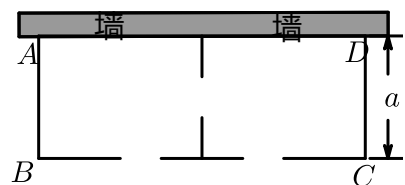
$\therefore S = AB \cdot BH = x(48 - 4x) = -4(x - 6)^2 + 144$ ，

$\therefore x = 6$ 时， S 可取得最大值，最大值为 $S = 144$ 。

【标注】 【知识点】 二次函数的几何问题

5. 2017~2018学年浙江温州初二下学期期中第23题7分 ★★★

某农场要建一个饲养场(长方形 $ABCD$)，饲养场的一面靠墙(墙最大可用长度为 27 米)，另三边用木栏围成，中间也用木栏隔开，分成两个场地，并在如图所示的三处各留 1 米宽的门(不用木栏)，建成后木栏总长 57 米，设饲养场(长方形 $ABCD$)的宽为 a 米。



(1) 饲养场的长为 _____ 米(用含 a 的代数式表示)。

(2) 若饲养场的面积为 288m^2 ，求 a 的值。

(3) 当 a 为何值时，饲养场的面积最大，此时饲养场达到的最大面积为多少平方米？

【答案】 (1) $60 - 3a$

(2) 12。

(3) 当 $a = 11$ 时， $y_{\text{最大}} = 297$ 。

【解析】 (1) 由已知饲养场的长为 $57 - 2a - (a - 1) + 2 = 60 - 3a$ 。

(2) 由 (1) 饲养场面积为 $a(60 - 3a) = 288$

解得 $a = 12$ 或 $a = 8$

当 $a = 8$ 时, $60 - 3a = 60 - 24 = 36 > 27$. 故 $a = 8$ 舍去.

则 $a = 12$.

(3) 设饲养场面积为 y .

$$\text{则 } y = a(60 - 3a) = -3a^2 + 60a = -3(a - 10)^2 + 300$$

$$\because 2 < 60 - 3a \leq 27$$

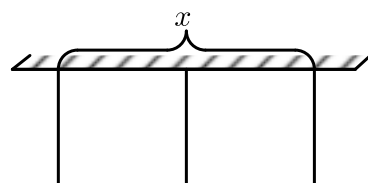
$$\therefore 11 \leq a < \frac{58}{3}$$

$$\therefore \text{当 } a = 11 \text{ 时, } y_{\text{最大}} = 297.$$

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

6. 2018~2019学年山东日照东港区日照市实验中学初三上学期期末第20题15分 ★★★

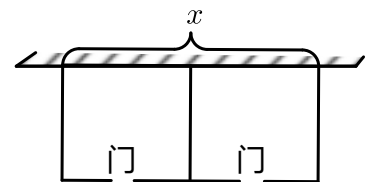
某农场拟建两间矩形饲养室, 一面靠现有墙(墙长足够长), 中间用一道墙隔开(如图1所示). 已知计划中的材料可建墙体总长46米, 设两间饲养室合计长 x (米), 总占地面积为 y (米²).



(图1)

(1) 求 y 关于 x 的函数表达式和自变量 x 的取值范围.

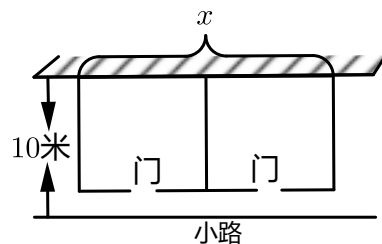
(2) 现需要设计这两间饲养室各开一扇门(如图2所示), 每扇门宽1米, 门不采用计划中的材料.



(图2)

① 求总占地面积最大为多少米?

② 如图3所示, 离墙10米外饲养室一侧准备修一条平行于墙的小路, 若拟建的饲养室面积尽量大, 饲养室的门口与小路的间隔为多少米?



(图3)

【答案】(1) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{46}{3}x (0 < x < 46)$.

(2) ① 192平方米 .

② 2米 .

【解析】(1) 由题意得： $y = \frac{46-x}{3}x = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{46}{3}x$,

$$\therefore \frac{46-x}{3} > 0 ,$$

$$\therefore x < 46 ,$$

$$\text{故：} y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{46}{3}x (0 < x < 46) .$$

$$(2) \text{ ① 由题意得：} y = \frac{48-x}{3} \cdot x = -\frac{1}{3}(x-24)^2 + 192 ,$$

故当 $x = 24$ 时， y 有最大值 192平方米 .

$$\text{② 由题意得：} \frac{48-x}{3} \leq 10 , \text{ 解得：} x \geq 18 ,$$

$$\therefore \text{当 } x = 24 \text{ 米时，} \frac{48-x}{3} = 8 ,$$

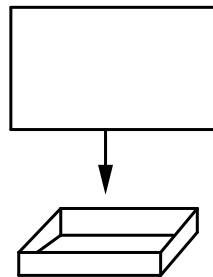
故饲养室的门口与小路的间隔为 $10 - 8 = 2$ 米 .

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

练习3

7. 2017~2018学年山东青岛李沧区初三下学期期中第22题(每题5分) ★★★

工人师傅用一块长为 10dm，宽为 6dm 的矩形铁皮制作一个无盖的长方体容器，需要将四角各裁掉一个正方形．（厚度不计）



(1) 在图中画出裁剪示意图，用实线表示裁剪线，虚线表示折痕；并求长方体底面面积为 12dm^2 时，裁掉的正方形边长多大？

(2) 若要求制作的长方体的底面长不大于底面宽的五倍，并将容器进行防锈处理，侧面每平方分米的费用为 0.5 元，底面每平方分米的费用为 2 元，裁掉的正方形边长多大时，总费用最低，最低为多少？

【答案】(1) 裁掉的正方形的边长为 2dm，底面积为 12dm^2 .

(2) 当裁掉边长为 2.5dm 的正方形时，总费用最低，最低费用为 25 元 .

【解析】(1) 如图所示：



设裁掉的正方形的边长为 $x\text{dm}$ ，

由题意可得 $(10 - 2x)(6 - 2x) = 12$ ，

即 $x^2 - 8x + 12 = 0$ ，解得 $x = 2$ 或 $x = 6$ （舍去），

答：裁掉的正方形的边长为 2dm ，底面积为 12dm^2 。

(2) $\because$ 长不大于宽的五倍，

$\therefore 10 - 2x \leq 5(6 - 2x)$ ，解得 $0 < x \leq 2.5$ ，

设总费用为 w 元，由题意可知

$$w = 0.5 \times 2x(16 - 4x) + 2(10 - 2x)(6 - 2x) = 4x^2 - 48x + 120 = 4(x - 6)^2 - 24，$$

$\therefore$ 对称轴为 $x = 6$ ，开口向上，

$\therefore$ 当 $0 < x \leq 2.5$ 时， w 随 x 的增大而减小，

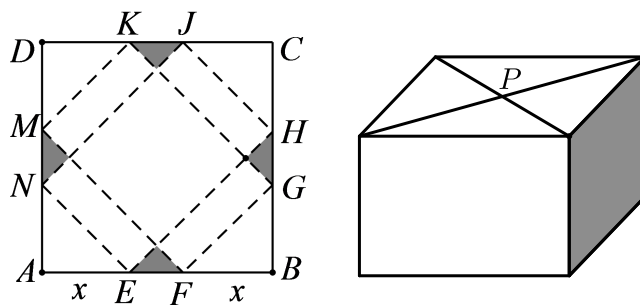
$\therefore$ 当 $x = 2.5$ 时， w 有最小值，最小值为 25 元，

答：当裁掉边长为 2.5dm 的正方形时，总费用最低，最低费用为 25 元。

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

8. 2017~2018 学年湖北武汉武昌区湖北华一寄宿学校初三上学期期中第 22 题 ★★★

如图所示， $ABCD$ 是边长为 60cm 的正方形硬纸片，切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形，再沿虚线折起，使得 $ABCD$ 四个点重合于图中的点 P ，正好形成一个长方体形状的包装盒， E 、 F 在 AB 上是被切去的等腰直角三角形斜边的两个端点，若广告商要求包装盒面积 $S\text{cm}^2$ 最大，试求 x 应取何值？设 $AE = FB = x\text{cm}$ ，包装盒侧面积为 $S\text{cm}^2$ 。



(1) 分析：由正方形硬纸片 $ABCD$ 的边长为 60cm ， $AE = FB = x\text{cm}$ ，则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}\text{cm}$ 。为更好地寻找题目中等量关系，将剪掉的阴影部分三角形集中，得到边长为 EF 的正方形，其面积为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$ ；折起的四个角上的四个等腰直角三角形的面积之和为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$ 。

(2) 由以上分析：用含 x 的代数式表示包装盒的侧面积 S 并求出问题的解。

【答案】 (1) $60 - 2x$ ； $(60 - 2x)^2$ ； $2x^2$

$$(2) S = -8(x-15)^2 + 1800. \text{ 当 } x = 15 \text{ 时, } S_{\max} = 1800 \text{ cm}^2.$$

【解析】(1) $EF = (60 - 2x) \text{ cm}$,

$$\text{面积: } (60 - 2x)^2 \text{ cm}^2,$$

$$\text{面积之和: } 2x^2 \text{ cm}^2.$$

$$(2) S = 60^2 - (60 - 2x)^2 - 4x^2, (0 < x < 30),$$

$$= 3600 - (3600 - 240x + 4x^2) - 4x^2$$

$$= -8x^2 + 240x$$

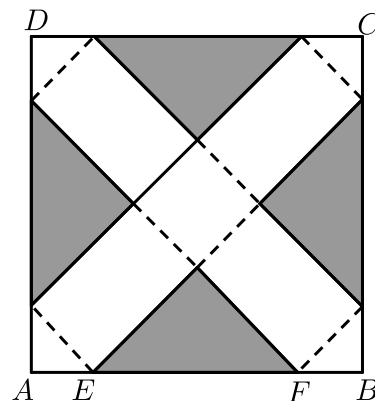
$$= -8(x-15)^2 + 1800.$$

$$\text{当 } x = 15 \text{ 时, } S_{\max} = 1800 \text{ cm}^2.$$

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

9. 2012年江苏无锡中考真题第24题8分 ★★★

如图, 在边长为 24cm 的正方形纸片 $ABCD$ 上, 剪去图中阴影部分的四个全等的等腰直角三角形, 再沿图中的虚线折起, 折成一个长方体形状的包装盒 (A 、 B 、 C 、 D 四个顶点正好重合于上底面一点). 已知 E 、 F 在 AB 边上, 是被剪去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点, 设 $AE = BF = x(\text{cm})$.



(1) 若折成的包装盒恰好是个正方体, 试求这个包装盒的体积 V .

(2) 某广告商要求包装盒的表面 (不含下底面) 面积 S 最大, 试问 x 应取何值?

【答案】(1) 这个包装盒的体积是 $432\sqrt{2}\text{cm}^3$.

(2) 当 $x = 8$ 时, S 取最大值, 384cm^2 .

【解析】(1) 根据题意, 设 $AE = BF = x(\text{cm})$, 折成的包装盒恰好是个正方体,

知这个正方体的底面边长 $NQ = ME = \sqrt{2}x$, 则 $QE = QF = \sqrt{2}x$, 故

$$EF = \sqrt{2}ME = 2x,$$

$\because$ 正方形纸片 $ABCD$ 边长为 24cm ,

$$\therefore x + 2x + x = 24,$$

解得: $x = 6$,

则正方体的底面边长 $a = 6\sqrt{2}$,

$$V = a^3 = (6\sqrt{2})^3 = 432\sqrt{2}(\text{cm}^3) .$$

答：这个包装盒的体积是 $432\sqrt{2}\text{cm}^3$.

(2) 设包装盒的底面边长为 $a\text{cm}$, 高为 $h\text{cm}$, 则 $a = \sqrt{2}x$, $h = \frac{24-2x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(12-x)$

$$\therefore S = 4ah + a^2 = 4\sqrt{2}x \cdot \sqrt{2}(12-x) + (\sqrt{2}x)^2$$

$$= -6x^2 + 96x$$

$$= -6(x-8)^2 + 384 ,$$

$$\because 0 < x < 12 ,$$

$\therefore$ 当 $x = 8$ 时 , S 取得最大值 384cm^2 .

【标注】【知识点】二次函数的几何问题

2. 利润问题

练习4

10. 2018~2019学年天津滨海新区初三上学期期末第23题10分 ★★★

某商家销售一款商品，该商品的进价为每件 80 元，现在的售价为每件 145 元，每天可销售 40 件．商场规定每销售一件需支付给商场管理费 5 元．通过市场调查发现，该商品单价每降 1 元，每天销售量增加 2 件．若每件商品降价 x 元，每天的利润为 y 元，请完成以下问题的解答．

(1) 用含 x 的式子表示：

① 每件商品的售价为 _____ 元．

② 每天的销售量为 _____ 件．

(2) 求出 y 与 x 之间的函数关系式，并求出售价为多少时利润最大？最大利润是多少元？

【答案】 (1) ① $(145 - x)$

② $(40 + 2x)$

$$(2) y = -2(x - 29)^2 + 1922 ,$$

当售价为 116 元时，利润最大，最大利润为 1922 元．

【解析】 (1) ① 每件商品的售价： $(145 - x)$ 元，

故答案为： $(145 - x)$ ．

② 每天的销售量： $(40 + 2x)$ 件．

故答案为： $(40 + 2x)$ ．

$$(2) y = (145 - x - 80 - 5)(40 + 2x) = (60 - x)(40 + 2x) = -2(x - 29)^2 + 1922 ,$$

当 $x = 29$ 时， y 有最大值 1922 ，

$$145 - 29 = 116 \text{ (元)},$$

∴当售价为 116 元时，利润最大，最大利润为 1922 元。

【标注】【知识点】列代数式

11. 2019~2020 学年天津河西区佟楼中学初三上学期期末模拟（一）第 23 题 ★★★

某商品的进价为每件 20 元，售价为每件 30 元，每个月可卖出 180 件；如果每件商品的售价每上涨 1 元，则每个月就会少卖出 10 件，但每件售价不能高于 35 元，设每件商品的售价上涨 x 元（ x 为整数），每个月的销售利润为 y 元。

- （1）求 y 与 x 的函数关系式，并直接写出自变量 x 的取值范围；
- （2）每件商品的售价为多少元时，每个月可获得最大利润？最大利润是多少？
- （3）每件商品的售价定为多少元时，每个月的利润恰好是 1920 元？

【答案】（1） $y = -10x^2 + 80x + 1800$ （ $0 \leq x \leq 5$ ，且 x 为整数）；

（2）每件商品的售价为 34 元时，商品的利润最大，为 1960 元；

（3）32 元。

【解析】（1） $y = (30 - 20 + x)(180 - 10x) = -10x^2 + 80x + 1800$ （ $0 \leq x \leq 5$ ，且 x 为整数）；

（2）由（1）知， $y = -10x^2 + 80x + 1800$ （ $0 \leq x \leq 5$ ，且 x 为整数）。

$$\because -10 < 0,$$

∴当 $x = 4$ 时， $y = 1960$ 元；

∴每件商品的售价为 34 元。

答：每件商品的售价为 34 元时，商品的利润最大，为 1960 元；

$$\text{（3）} 1920 = -10x^2 + 80x + 1800$$

$$x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$(x - 2)(x - 6) = 0,$$

解得 $x = 2$ 或 $x = 6$ ，

$$\because 0 \leq x \leq 5,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore 30 + 2 = 32 \text{ (元)}$$

∴售价为 32 元时，利润为 1920 元。

【标注】【知识点】一元二次方程的利润问题

12. 2020~2021 学年 2 月广东广州越秀区广州市铁一中学（本部校区）初三下学期月考第 22 题 10 分

★★★

某水果批发市场经销一种水果，如果每千克盈利 10 元，每天可售出 500 千克、经市场调查发现，在进价不变的情况下，若每千克这种水果在原售价的基础上每涨价 1 元，日销售量将减少 20 千克．

- (1) 如果市场某天销售这种水果盈利了 6000 元，同时顾客又得到了实惠，那么每千克这种水果涨了多少元？
- (2) 设每千克这种水果涨价 x 元时 ($0 < x \leq 25$)，市场每天销售这种水果所获利润为 y 元．若不考虑其他因素，单纯从经济角度看，每千克这种水果涨价多少元时，市场每天销售这种水果盈利最多？最多盈利多少元？

【答案】 (1) 5 元．

(2) 每千克这种水果涨价 7.5 元，最多盈利 6125 元．

【解析】 (1) 设市场某天销售这种水果盈利了 6000 元，同时顾客又得到了实惠时，每千克这种水果涨了 x 元，

由题意得 $(10 + x)(500 - 20x) = 6000$ ，

整理，得 $x^2 - 15x + 50 = 0$ ，

解得 $x_1 = 5$ ， $x_2 = 10$ ，

因为顾客得到了实惠，应取 $x = 5$ ，

答，市场某天销售这种水果盈利 6000 元，同时顾客又得到了实惠时，每千克这种水果涨了 5 元．

(2) 因为每千克这种水果涨价 x 元时，市场每天销售这种水果所获利润为 y 元， y 关于 x 的函数解析式为 $y = (10 + x)(0 < x \leq 25)$ ，

而 $y = (10 + x) = -20x^2 + 300x + 5000 = -20(x - 7.5)^2 + 6125$ ，

所以，当 $x = 7.5$ 时 ($0 < 7.5 \leq 25$)， y 取得最大值，最大值为 6125，

答：不考虑其他因素，单纯从经济角度看，每千克这种水果涨价 7.5 元时，市场每天销售这种水果盈利最多，最多盈利 6125 元．

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

13. 2018~2019 学年甘肃定西安定区初三上学期期末第 25 题 7 分 ★★★

小明大学毕业回家乡创业，第一期培植盆景与花卉各 50 盆．售后统计，盆景的平均每盆利润是 160 元，花卉的平均每盆利润是 19 元．调研发现：

- ① 盆景每增加 1 盆，盆景的平均每盆利润减少 2 元；每减少 1 盆，盆景的平均每盆利润增加 2 元．
- ② 花卉的平均每盆利润始终不变．

小明计划第二期培植盆景与花卉共 100 盆，设培植的盆景比第一期增加 x 盆，第二期盆景与花卉售完后的利润分别为 W_1 ， W_2 (单位：元)．

(1) 用含 x 的代数式分别表示 W_1 ， W_2 ．

(2) 当 x 取何值时, 第二期培植的盆景与花卉售完后获得的总利润 W 最大, 最大总利润是多少.

【答案】 (1) $W_1 = -2x^2 + 60x + 8000$,

$$W_2 = -19x + 950.$$

(2) 当 $x = 10$ 时, 第二期培植的盆景与花卉售完后获得的总利润 W 最大, 最大总利润是 9160 元.

【解析】 (1) 设培植的盆景比第一期增加 x 盆,

则第二期盆景有 $(50 + x)$ 盆, 花卉有 $(50 - x)$ 盆,

$$\therefore W_1 = (50 + x)(160 - 2x) = -2x^2 + 60x + 8000,$$

$$W_2 = 19(50 - x) = -19x + 950.$$

(2) 根据题意, 得:

$$W = W_1 + W_2$$

$$= -2x^2 + 60x + 8000 - 19x + 950$$

$$= -2x^2 + 41x + 8950$$

$$= -2\left(x - \frac{41}{4}\right)^2 + \frac{73281}{8},$$

$\because -2 < 0$, 且 x 为整数,

$\therefore$ 当 $x = 10$ 时, W 取得最大值, 最大值为 9160.

答: 当 $x = 10$ 时, 第二期培植的盆景与花卉售完后获得的总利润 W 最大, 最大总利润是 9160 元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

练习5

14. 2016~2017学年浙江杭州余杭区初三上学期中第20题10分 ★★★★★

某商店购进一种商品, 每件商品进价 30 元. 试销中发现这种商品每天的销售量 y (件) 与每件销售价 x (元) 的关系数据如下:

x	30	32	34	36
y	40	36	32	28

(1) 已知 y 与 x 满足一次函数关系, 根据上表, 求出 y 与 x 之间的关系式 (不写出自变量 x 的取值范围).

(2) 如果商店销售这种商品, 每天要获得 150 元利润, 那么每件商品的销售价应定为多少元?

(3) 设该商店每天销售这种商品所获利润为 w (元), 求出 w 与 x 之间的关系式, 并求出每件商品销售价定为多少元时, 利润最大?

【答案】 (1) 该函数的表达式为 $y = -2x + 100$.

(2) 每件商品的销售价定为 35 元或 45 元时, 日利润为 150 元 .

(3) $w = -2(x - 40)^2 + 200 (x > 30)$, 当销售单价为 40 元时, 获得利润最大 .

【解析】 (1) 设该函数的表达式为 $y = kx + b$,

根据题意, 得: $\begin{cases} 40 = 30k + b \\ 36 = 32k + b \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} k = -2 \\ b = 100 \end{cases}$.

$\therefore$ 该函数的表达式为 $y = -2x + 100$.

(2) 根据题意, 得 $(-2x + 100)(x - 30) = 150$,

解这个方程得: $x_1 = 35$, $x_2 = 45$,

$\therefore$ 每件商品的销售价定为 35 元或 45 元时, 日利润为 150 元 .

(3) 根据题意得:

$$w = (-2x + 100)(x - 30)$$

$$= -2x^2 + 160x - 3000$$

$$= -2(x - 40)^2 + 200$$

$\because a = -2 < 0$, 则抛物线开口向下, 函数有最大值,

即当 $x = 40$ 时, w 的值最大 .

$\therefore$ 当销售单价为 40 元时, 获得利润最大 .

【标注】 【知识点】一元二次方程的利润问题

【知识点】根据条件写一次函数解析式

【知识点】二次函数的利润问题

15. 2020~2021 学年山东烟台龙口市初三上学期期中第 24 题 ★★★

小李在景区销售一种旅游纪念品, 已知每件进价为 6 元, 当销售单价定为 8 元时, 每天可以销售 200 件, 市场调查反映: 销售单价每提高 1 元, 日销量将会减少 10 件, 物价部门规定: 销售单价不能超过 12 元, 设该纪念品的销售单价为 x (元), 日销量为 y (件), 日销售利润为 w (元) .

(1) 求 y 与 x 的函数关系式 .

(2) 要使日销售利润为 720 元, 销售单价应定为多少元?

(3) 求日销售利润 w (元) 与销售单价 x (元) 的函数关系式, 当 x 为何值时, 日销售利润最大, 并求出最大利润 .

【答案】 (1) $y = 280 - 10x$.

(2) 销售单价定为 10 元 .

(3) 函数关系式为 $w = -10x^2 + 340x - 1680$, 当 $x = 12$ 时, $w_{\max} = 960$ (元) .

【解析】 (1) $y = 200 - (x - 8) \cdot 10 = 280 - 10x$.

$$(2) w = y \cdot (x - 6) = (280 - 10x) \cdot (x - 6)$$

$$= -10x^2 + 340x - 1680,$$

$$\text{令 } w = 720, \text{ 即 } -10x^2 + 340x - 1680 = 720.$$

解得: $x_1 = 24, x_2 = 10$, 又: 销售单价不超过 12 元.

$\therefore x = 10$, 即销售单价应定为 10 元.

$$(3) \text{ 由 (2) 得 } w = -10x^2 + 340x - 1680$$

$$= -10(x - 17)^2 + 1210,$$

当 $x = 17$ 时, 获最大利润, 但 $x \leq 12$,

$\therefore$ 当 $x = 12$ 时,

$$\text{得最大利润为 } w_{\max} = -10 \times (12 - 17)^2 + 1210 = 960.$$

答: 当 $x = 12$ 时, 获日销最大利润 960 元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

16. 2019~2020 学年安徽合肥瑶海区初三上学期期末第 22 题 12 分 ★★★

俄罗斯世界杯足球赛期间, 某商店销售一批足球纪念册, 每本进价 40 元, 规定销售单价不低于 44 元, 且获利不高于 30%, 试销售期间发现, 当销售单价定为 44 元时, 每天可售出 300 本, 销售单价每上涨 1 元, 每天销售量减少 10 本, 现商店决定提价销售. 设每天销售量为 y 本, 销售单价为 x 元.

(1) 请直接写出 y 与 x 之间的函数关系式和自变量 x 的取值范围.

(2) 当每本足球纪念册销售单价是多少元时, 商店每天获利 2400 元.

(3) 将足球纪念册销售单价定为多少元时, 商店每天销售纪念册获得的利润 w 元最大. 最大利润是多少元.

【答案】 (1) $y = -10x + 740 (44 \leq x \leq 52)$.

(2) 当每本足球纪念册销售单价是 50 元时, 商店每天获利 2400 元.

(3) 将足球纪念册销售单价定为 52 元时, 商店每天销售纪念册获得的利润 w 元最大, 最大利润是 2640 元.

【解析】 (1) $y = 300 - 10(x - 44)$,

$$\text{即 } y = -10x + 740 (44 \leq x \leq 52).$$

(2) 根据题意得 $(x - 40)(-10x + 740) = 2400$,

$$\text{解得: } x_1 = 50, x_2 = 64 \text{ (舍去)},$$

答: 当每本足球纪念册销售单价是 50 元时, 商店每天获利 2400 元.

(3) $w = (x - 40)(-10x + 740)$

$$= -10x^2 + 1140x - 29600$$

$$= -10(x - 57)^2 + 2890,$$

当 $x < 57$ 时, w 随 x 的增大而增大,

而 $44 \leq x \leq 52$,

所以当 $x = 52$ 时, w 有最大值, 最大值为: $-10(52 - 57)^2 + 2890 = 2640$,

答: 将足球纪念册销售单价定为 52 元时, 商店每天销售纪念册获得的利润 w 元最大, 最大利润是 2640 元.

【标注】【知识点】二次函数的利润问题

练习6

17. 2020~2021学年10月天津南开区天津市南开中学初三上学期月考第23题 ★★★

超市销售某种儿童玩具, 如果每件利润为 40 元 (市场管理部门规定, 该种玩具每件利润不能低于 40 元且不能超过 60 元), 每天可售出 50 件. 根据市场调查发现, 销售单价每增加 2 元, 每天销售量会减少 1 件. 设销售单价增加 x 元, 每天售出 y 件.

(1) 请写出 y 与 x 之间的函数表达式.

(2) 当 x 为多少时, 超市每天销售这种玩具可获利润 2250 元?

(3) 设超市每天销售这种玩具可获利 w 元, 当 x 为多少时 w 最大, 最大值是多少?

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x + 50$.

(2) 10.

(3) 当 x 为 20 时 w 最大, 最大值是 2400 元.

【解析】 (1) 根据题意得, $y = -\frac{1}{2}x + 50$.

(2) 根据题意得, $(40 + x)\left(-\frac{1}{2}x + 50\right) = 2250$

解得: $x_1 = 50$, $x_2 = 10$,

$\therefore$ 每件利润不能超过 60 元,

$\therefore x = 10$,

答: 当 x 为 10 时, 超市每天销售这种玩具可获利润 2250 元.

(3) 根据题意得,

$$w = (40 + x)\left(-\frac{1}{2}x + 50\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + 30x + 2000$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 30)^2 + 2450,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} < 0,$$

$\therefore$ 当 $x < 30$ 时, w 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = 20$ 时, $w_{\text{最大}} = 2400$,

答: 当 x 为 20 时 w 最大, 最大值是 2400 元.

18. 2019~2020学年10月天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期月考第18题12分

★★★

某商场销售一种小商品，每件进货价为 190 元．调查发现，当销售价为 210 元时，平均每天能销售 8 件；当销售价每降低 2 元时，平均每天就能多销售 4 件．设每件小商品降价 x 元，平均每天销售 y 件．

- (1) 直接写出 y 与 x 之间的函数关系式（不必写出 x 的取值范围）．
- (2) 商场要想使这种小商品平均每天的销售利润达到 280 元，求每件小商品的销售价应定为多少元？
- (3) 设每天的销售总利润为 w 元，求 w 与 x 之间的函数关系式；每件商品降价多少元时，每天的总利润最大？最大利润是多少？

【答案】(1) $y = 8 + 2x$.

(2) 每件小商品的销售价应定为 204 元或 200 元时，每天的销售利润达到 280 元 .

(3) $w = -2(x - 8)^2 + 288$,

每件商品的降价 8 元时，每天可获得最大利润，最大的月利润是 288 .

【解析】(1) ∵ 设每件小商品降价 x 元，平均每天销售 y 件，

∴ y 与 x 间的函数关系式为： $y = 8 + 2x$.

(2) $(210 - 190 - x)(8 + 2x) = 280$,

解得： $x_1 = 10$, $x_2 = 6$,

∴ 每件小商品的销售价应定为 204 元或 200 元时，

每天的销售利润达到 280 元 .

(3) 由题意得出：

$$w = (210 - 190 - x)(8 + 2x) = -2(x - 8)^2 + 288 ,$$

$$a = -2 < 0 ,$$

故当 $x = 8$ 时， w 有最大值 288 ,

综上所述，每件商品的降价 8 元时，每天可获得最大利润，最大的月利润是 288 .

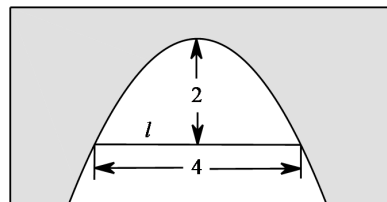
二、建立直角坐标系解决问题

3. 拱桥问题

练习7

19. 2015~2016学年10月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第22题10分 ★★★

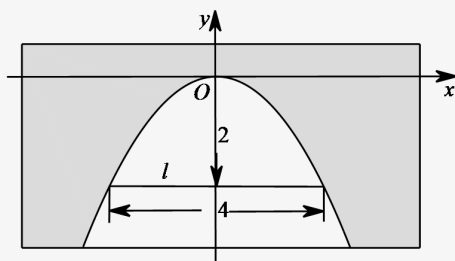
图中是抛物线形拱桥，当水面宽为 4 米时，拱顶距离水面 2 米；当水面高度下降 1 米时，水面宽度为多少米？



【答案】 当水面高度下降 1 米时，水面宽度为 $2\sqrt{6}$ 米。

【解析】 如图所示，建立平面直角坐标系。

设二次函数的解析式为



$$y = ax^2 (a \neq 0).$$

∵ 图象经过点 $(2, -2)$,

$$\therefore -2 = 4a,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2.$$

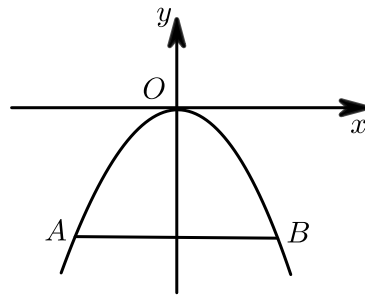
当 $y = -3$ 时， $x = \pm\sqrt{6}$ 。

答：当水面高度下降 1 米时，水面宽度为 $2\sqrt{6}$ 米。

【标注】 【知识点】二次函数的通行问题

20. 2017~2018学年10月天津和平区天津市第十九中学初三上学期月考第24题10分 ★★★

某涵洞是抛物线形，它的截面如图所示，现测得水面宽 $AB = 1.6\text{m}$ ，涵洞顶点 O 到水面的距离为 2.4m 。



- (1) 求出涵洞所在抛物线的函数表达式 .
 (2) 当水面宽 1.2 米时 , 水面上升多少米 .

【答案】 (1) $y = -\frac{15}{4}x^2$.

(2) 水面上升 1.05 米 .

【解析】 (1) 由题意得 ,

设函数关系式为 $y = ax^2$,

A 点坐标应该为 $(-0.8, -2.4)$,

那么 $-2.4 = a \cdot (-0.8)^2$,

解得 $a = -\frac{15}{4}$,

$\therefore$ 函数表达式为 $y = -\frac{15}{4}x^2$.

(2) 当 $x = 0.6$ 时 , $y = -\frac{15}{4} \times \frac{9}{25} = -1.35$,

则 $2.4 - 1.35 = 1.05(\text{m})$,

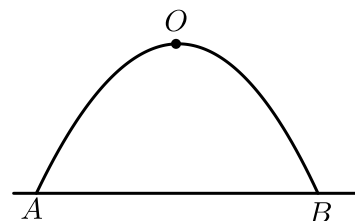
答 : 水面上升 1.05 米 .

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

练习8

21. 2018~2019 学年 9 月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第 23 题 ★★★

某隧道洞的内部截面顶部是抛物线形 , 现测得地面宽 $AB = 10\text{m}$, 隧道顶点 O 到地面 AB 的距离为 5m .

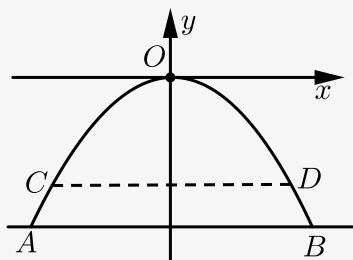


- (1) 建立适当的平面直角坐标系 , 并求该抛物线的解析式 .
 (2) 一辆小轿车长 4.5 米 , 宽 2 米 , 高 1.5 米 , 同样大小的小轿车通过该隧洞 , 最多能并排行驶多少辆 ?

【答案】(1) 画图见解析； $y = -\frac{1}{5}x^2 (-5 \leq x \leq 5)$.

(2) 最多能并排行驶 4 辆 .

【解析】(1) 如图，以抛物线的顶点为坐标原点，对称轴为 y 轴，建立直角坐标系，



则 $O(0,0)$, $B(5,-5)$.

设 $y = ax^2$,

$\therefore$ 抛物线经过 $(5,-5)$,

$\therefore -5 = 25a$,

$\therefore a = -\frac{1}{5}$,

$\therefore y = -\frac{1}{5}x^2 (-5 \leq x \leq 5)$.

(2) 当 $y = -5 + 1.5 = -3.5$ 时， $y = -3.5$ 与抛物线交于 C , D 两点，

$-3.5 = -\frac{1}{5}x^2$,

解得 $x = \pm \frac{\sqrt{70}}{2}$,

$\therefore C\left(-\frac{\sqrt{70}}{2}, 3.5\right)$, $D\left(\frac{\sqrt{70}}{2}, 3.5\right)$,

$\therefore CD = \sqrt{70}$.

又 $\because 8 < \sqrt{70} < 9$,

$\therefore 4 < \frac{CD}{2} < 4.5$,

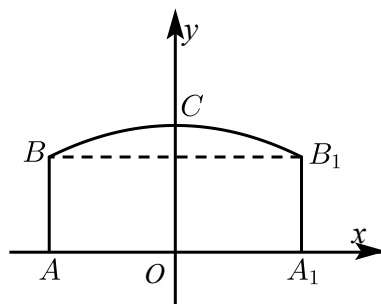
$\therefore$ 最多能并排行驶 4 辆 .

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

22. 2020~2021 学年江苏苏州姑苏区苏州市立达中学校初三上学期单元测试《二次函数》(A 卷)第 19 题

★★★

如图，隧道的截面由抛物线和长方形构成．长方形的长为 16m，宽 6m，抛物线的最高点 C 离路面 AA_1 的距离为 8m，以 AA_1 所在直线为 x 轴，以线段 AA_1 的中点为坐标原点建立平面直角坐标系．



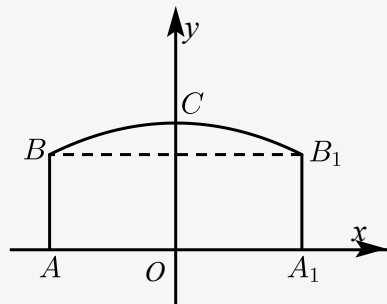
(1) 求出函数表达式.

(2) 一大型货车装载设备后高为 7m, 宽为 4m, 如果隧道内设双向行驶车道, 那么这辆货车能否安全通过?

【答案】(1) $y = -\frac{1}{32}x^2 + 8$.

(2) 能安全通过.

【解析】(1)



根据题意得 $A(-8, 0)$, $B(-8, 6)$, $C(0, 8)$,

设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 8$,

把 $B(-8, 6)$ 代入,

得: $64a + 8 = 6$,

解得: $a = -\frac{1}{32}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{32}x^2 + 8$.

(2) 根据题意, 把 $x = \pm 4$ 代入解析式 $y = -\frac{1}{32}x^2 + 8$,

得 $y = 7.5\text{m}$,

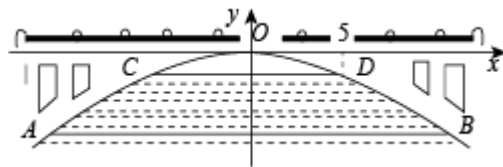
$\therefore 7.5\text{m} > 7\text{m}$,

$\therefore$ 货运卡车能安全通过.

【标注】【知识点】二次函数的通行问题

23. 2017~2018学年12月北京西城区北京师范大学附属实验中学初三上学期月考第23题5分 ★★★

如图, 有一座抛物线形拱桥, 在正常水位时水面 AB 的宽为 20 米, 如果水位上升 3 米, 则水面 CD 的宽是 10 米.



(1) 建立如图所示的直角坐标系, 求此抛物线的解析式.

(2) 当水位在正常水位时, 有一艘宽为 6 米的货船经过这里, 船舱上有高出水面 3.6 米的长方体货物 (货物与货船同宽). 问: 此船能否顺利通过这座拱桥?

【答案】(1) $y = -\frac{1}{25}x^2$.

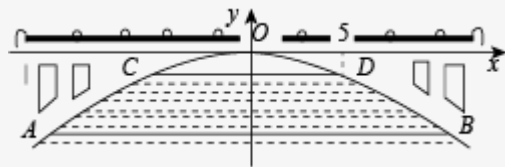
(2) 在正常水位时, 此船能顺利通过这座拱桥.

【解析】(1) 设抛物线解析式为 $y = ax^2$, 点 $B(10, n)$, 点 $D(5, n+3)$.

$$\text{由题意: } \begin{cases} n = 100a \\ n + 3 = 25a \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} n = -4 \\ a = -\frac{1}{25} \end{cases}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{25}x^2.$$



(2) 方法一:

$$\text{当 } x = 3 \text{ 时, } y = -\frac{1}{25} \times 9,$$

$$\therefore -\frac{9}{25} - (-4) > 3.6$$

$\therefore$ 在正常水位时, 此船能顺利通过这座拱桥.

方法二:

$$\text{当 } y = 3.6 - 4 = -\frac{2}{5} \text{ 时, } -\frac{2}{5} = -\frac{1}{25}x^2,$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{10}.$$

$$\therefore |\pm\sqrt{10}| > 3,$$

$\therefore$ 在正常水位时, 此船能顺利通过这座拱桥.

【标注】【知识点】二次函数的其他实际问题

4. 轨迹问题

24. 2019~2020学年天津河北区天津外国语大学附属外国语学校初三上学期期末第14题3分 ★

已知飞机着陆后滑行距离 y (单位: m) 关于滑行的时间 t (单位: s) 的函数解析式是

$y = 60t - 1.5t^2$, 那么飞机着陆后滑行 _____ s 才能停下来.

【答案】 20

$$\text{【解析】 } \because y = 60t - \frac{3}{2}t^2 = -\frac{3}{2}(t - 20)^2 + 600,$$

$\therefore$ 当 $t = 20$ 时, y 取得最大值 600,

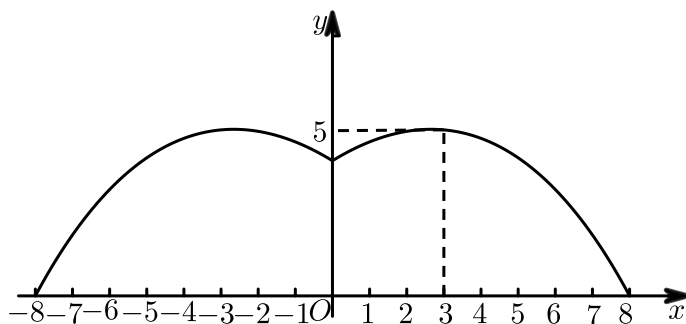
即飞机着陆后滑行 600 米才能停下来.

此时 $t = 20$, 飞机着陆后滑行 600 米才能停下来.

【标注】【知识点】二次函数的其他实际问题

25. 2019~2020学年湖南益阳赫山区初三上学期期末第21题8分 ★★★

某游乐园有一个直径为 16 米的圆形喷水池，喷水池的周边有一圈喷水头，喷出的水柱为抛物线，在距水池中心 3 米处达到最高，高度为 5 米，且各方向喷出的水柱恰好在喷水池中心的装饰物处汇合．如图所示，以水平方向为 x 轴，喷水池中心为原点建立平面直角坐标系．



- (1) 求水柱所在抛物线（第一象限部分）的函数表达式．
 (2) 王师傅在喷水池内维修设备期间，喷水管意外喷水，为了不被淋湿，身高 1.8 米的王师傅站立时必须在离水池中心多少米以内．

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{5}(x-3)^2 + 5$.

(2) 王师傅应该站在距离水池中心 7 米以内．

【解析】 (1) 设 $y = a(x-3)^2 + 5 (a \neq 0)$,

依题意，抛物线过点 $(8, 0)$,

$$0 = a(8-3)^2 + 5$$

$$a = -\frac{1}{5} ,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{5}(x-3)^2 + 5 (0 < x < 8) .$$

$$(2) \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, } y = -\frac{1}{5} \times 3^2 + 5 = \frac{16}{5} > 1.8 ,$$

$$\text{将 } y = 1.8 \text{ 代入 } y = -\frac{1}{5}(x-3)^2 + 5 ,$$

$$-\frac{1}{5}(x-3)^2 + 5 = 1.8$$

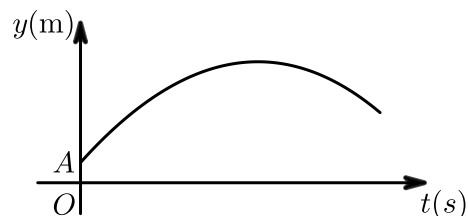
$$x_1 = -1 \text{ (舍)}, x_2 = 7 .$$

$\therefore$ 王师傅应该站在距离水池中心 7 米以内．

【标注】【知识点】二次函数的其他实际问题

26. 2020~2021 学年浙江杭州滨江区杭二中白马湖学校初三上学期开学考试第 21 题 10 分 ★★★

如图，某足球运动员站在点 O 处练习射门，将足球从离地面 0.5m 的 A 处正对球门踢出（点 A 在 y 轴上），足球的飞行高度 y （单位：m）与飞行时间 t （单位：s）之间满足函数关系 $y = at^2 + 5t + c$ ，已知足球飞行 0.8s 时，离地面的高度为 3.5m．



- (1) 足球飞行的时间是多少时，足球离地面最高？最大高度是多少？
- (2) 若足球飞行的水平距离 x (单位：m) 与飞行时间 t (单位：s) 之间具有函数关系 $x = 10t$ ，已知球门的高度为 2.44m，如果该运动员正对球门射门时，离球门的水平距离为 28m，他能否将球直接射入球门？

【答案】 (1) 足球飞行的时间是 $\frac{8}{5}$ s 时，最大高度是 $\frac{9}{2}$ m。

(2) 他能将球直接射入球门。

【解析】 (1) 由题意得：函数 $y = at^2 + 5t + c$ 的图象经过 $(0, 0.5)$ ， $(0.8, 3.5)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 0.5 = c \\ 3.5 = 0.8^2 a + 5 \times 0.8 + c \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -\frac{25}{16} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为：} y = -\frac{25}{16}t^2 + 5t + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{8}{5} \text{ 时，} y_{\max} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \text{足球飞行的时间是 } \frac{8}{5} \text{ s 时，最大高度是 } \frac{9}{2} \text{ m。}$$

(2) 把 $x = 28$ 代入 $x = 10t$ 得 $t = 2.8$ ，

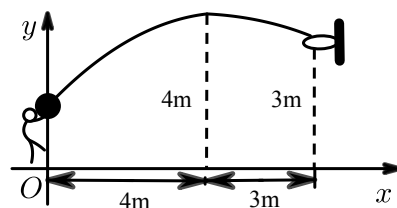
$$\therefore \text{当 } t = 2.8 \text{ 时，} y = -\frac{25}{16} \times 2.8^2 + 5 \times 2.8 + \frac{1}{2} = 2.25 < 2.44$$

$\therefore$ 他能将球直接射入球门。

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

27. 2019~2020学年11月天津和平区天津市益中学校初三上学期月考第22题 ★★★

在一次篮球比赛中，如图队员甲正在投篮，已知球出手时离地面 $\frac{20}{9}$ m，与篮圈中心的水平距离为 7m，球出手后水平距离为 4m 时达到最大高度 4m，设篮球运行轨迹为抛物线，篮圈距地面 3m。



- (1) 建立如图所示的平面直角坐标系，问此球能否准确投中？
- (2) 此时，对方队员乙在甲面前 1m 处跳起盖帽拦截，已知乙的最大摸高为 3.1m，那么他能否获得成功？

【答案】 (1) 此球能准确投中 .

(2) 乙能盖帽成功 .

【解析】 (1) 设抛物线的解析式为: $y = a(x-4)^2 + 4$,

$\because$ 点 $(0, \frac{20}{9})$ 在此抛物线上 ,

$$\therefore \frac{20}{9} = a(0-4)^2 + 4 ,$$

$$\text{解得: } a = -\frac{1}{9} ,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{9}(x-4)^2 + 4 ,$$

$$\text{当 } x = 7 \text{ 时, } y = -\frac{1}{9} \times (7-4)^2 + 4 , \text{ 得 } y = 3 ,$$

即此球能准确投中 .

$$(2) \text{ 当 } x = 1 \text{ 时, } y = -\frac{1}{9}(1-4)^2 + 4 = 3 ,$$

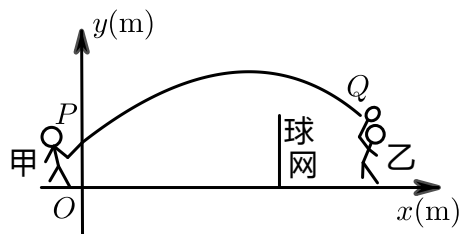
$$\because 3.1 > 3 ,$$

$\therefore$ 乙能盖帽成功 .

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题

28. 2017年浙江金华中考真题第21题9分 ★★★

甲、乙两人进行羽毛球比赛, 羽毛球飞行的路线为抛物线的一部分, 如图, 甲在 O 点正上方 1m 的 P 处发出一球, 羽毛球飞行的高度 $y(\text{m})$ 与水平距离 $x(\text{m})$ 之间满足函数表达式 $y = a(x-4)^2 + h$, 已知点 O 与球网的水平距离为 5m , 球网的高度为 1.55m .



(1) 当 $a = -\frac{1}{24}$ 时:

① 求 h 的值 .

② 通过计算判断此球能否过网 .

(2) 若甲发球过网后, 羽毛球飞行到距点 O 的水平距离为 7m 、离地面的高度为 $\frac{12}{5}\text{m}$ 的 Q 处时, 乙扣球成功, 求 a 的值 .

【答案】 (1) ① $\frac{5}{3}$.

② 能过网 .

(2) $-\frac{1}{5}$.

【解析】 (1) ① 当 $a = -\frac{1}{24}$ 时, $y = -\frac{1}{24}(x-4)^2 + h$,

$$\text{将点 } P(0, 1) \text{ 代入, 得: } -\frac{1}{24} \times 16 + h = 1 ,$$

解得： $h = \frac{5}{3}$.

② 把 $x = 5$ 代入 $y = -\frac{1}{24}(x-4)^2 + \frac{5}{3}$, 得： $y = -\frac{1}{24} \times (5-4)^2 + \frac{5}{3} = 1.625$,

$\therefore 1.625 > 1.55$,

$\therefore$ 此球能过网 .

(2) 把 $(0, 1)$ 、 $\left(7, \frac{12}{5}\right)$ 代入 $y = a(x-4)^2 + h$, 得：

$$\begin{cases} 16a + h = 1 \\ 9a + h = \frac{12}{5} \end{cases} ,$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ h = \frac{21}{5} \end{cases} ,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{5} .$$

【标注】【知识点】二次函数的轨迹问题